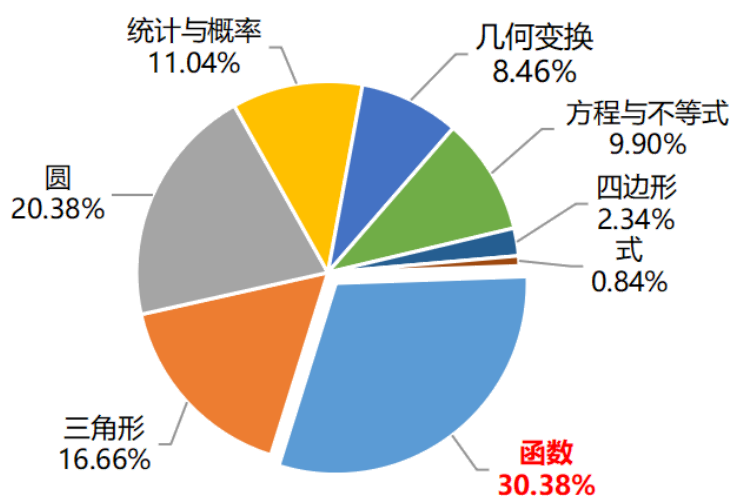


第1讲 二次函数图象及基本性质

二次函数是人教版教材第二十二章的内容，在了解二次函数性质的基础上，还会与我们之前所学的代数及几何进行综合，是期中、期末考试的重要考察点。本模块《二次函数初步》，重点包括二次函数的图象与基本性质，二次函数与代数综合，同时也需要学生在理解性质的基础上，利用所学内容解决实际问题。

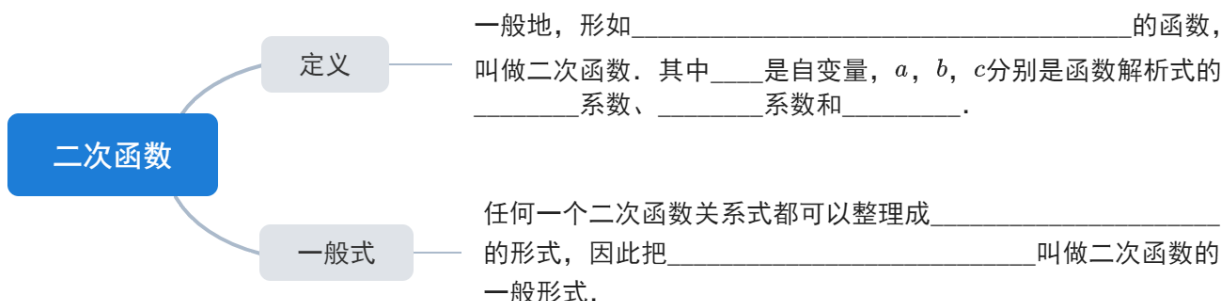
本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块二次函数图象及基本性质、二次函数解析式与图象变换、二次函数与方程不等式、二次函数的实际应用4讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
二次函数的概念	★	低
二次函数图象与性质	★★	中
二次函数解析式	★	高
二次函数图象变换	★★★	中
二次函数与方程	★★★★	中
二次函数与不等式	★★★★★	中
二次函数实际应用	★★★	高

一、二次函数概念



【备注】 1、二次函数定义：一般地，形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数， $a \neq 0$) 的函数，叫做**二次函数**。其中 x 是自变量， a, b, c 分别是函数解析式的二次项系数、一次项系数和常数项。

2、二次函数一般式：任何一个二次函数关系式都可以整理成 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数， $a \neq 0$) 的形式，因此把 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数， $a \neq 0$) 叫做**二次函数的一般形式**。

3、二次函数结构特征判断：

① 等号左边是变量 y ，右边是关系自变量 x 的**整式**；

② a, b, c 为常数，且 $a \neq 0$ 。

③ 等式的右边**最高次数为2**，可以没有一次项和常数项，但**不能没有二次项**。

！注意：判断是否为二次函数时，也要先将函数化为一般式后再进行判断

4、二次函数自变量的取值范围：

① 一般情况下，二次函数自变量的取值范围是全体实数。

② 实际问题中，自变量的取值范围根据实际问题而定。

🍎 举个“栗”子

栗子1

1. 下列函数是二次函数的有 ()。

① $y = 1 - x^2$ ，② $y = \frac{2}{x^2}$ ，③ $y = x(x - 3)$ ，④ $y = ax^2 + bx + c$ ，⑤ $y = 2x + 1$ ，⑥

$y = 2(x + 3)^2 - 2x^2$

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【备注】 判断是否为二次函数时，要先将函数化为一般式，注意分析二次项系数是否为0

【答案】 B

【解析】 根据二次函数的定义判断，①、③为二次函数．

故选B．

【标注】【知识点】二次函数的定义

栗子2

2. 若函数 $y = (m - 3)x^{m^2-7}$ 是二次函数，则 m 的值为 _____ ．

【备注】 二次函数要满足自变量最高次为2，同时也要满足二次项系数不为0

【答案】 -3

【解析】 若 $y = (m - 3)x^{m^2-7}$ 是二次函数，

则 $m^2 - 7 = 2$ ，且 $m - 3 \neq 0$ ，

故 $(m - 3)(m + 3) = 0$ ， $m \neq 3$ ，

解得： $m_1 = 3$ （不合题意舍去）， $m_2 = -3$ ，

$\therefore m = -3$ ．

故答案为：-3．

【标注】【知识点】利用二次函数的定义求参数的值

栗子3

3. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$) 的图象经过点(1, 1)，则代数式 $3 - a - b$ 的值为 _____ ．

【备注】 已知函数图象经过某点，则将点的坐标代入到解析式中一定能够成立

【答案】 1

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx - 1$ 的图象经过点(1, 1)，

$\therefore a + b - 1 = 1$ ，

$\therefore a + b = 2$ ，

$\therefore 3 - a - b = 3 - 2 = 1$ ．

【标注】【知识点】点在二次函数图象上

4. 若二次函数 $y = (m + 1)x^2 - mx + m^2 - 2m - 3$ 的图象经过原点，则 m 的值必为 () ．

A. -1或3

B. -1

C. 3

D. -3或1

【备注】函数图象经过原点，将原点代入到解析式中即可求出参数的值，同样也要注意二次项系数不为0

【答案】 C

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = (m+1)x^2 - mx + m^2 - 2m - 3$ 的图象经过原点 $(0, 0)$,

$$\therefore m^2 - 2m - 3 = 0 ,$$

$$\text{解得 } m_1 = -1 , m_2 = 3 ,$$

$\because y = (m+1)x^2 - mx + m^2 - 2m - 3$ 是二次函数 ,

$$\therefore m+1 \neq 0 , \text{ 即 } m \neq -1 ,$$

$$\therefore m = 3 .$$

【标注】 【知识点】 点在二次函数图象上

二、 二次函数图象与性质

知识回顾：

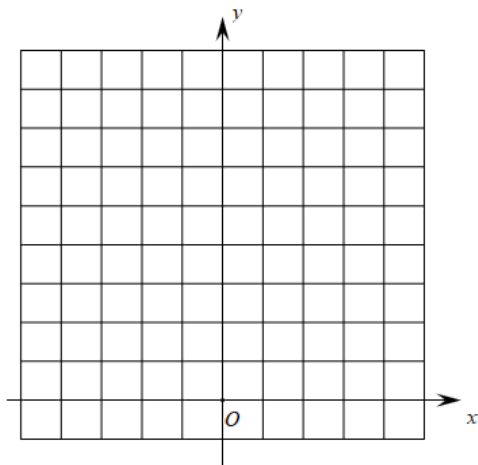
请用描点法画函数 $y = x^2$ 的图象 .

①列表

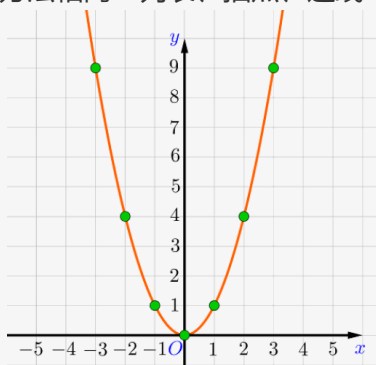
x		-3	-2	-1	0	1	2	3	
y									

②描点

③连线



【备注】画二次函数图象与一次函数的方法相同：列表、描点、连线



！总结：

从图象可以看出，二次函数 $y = x^2$ 的图象是一条曲线，它的形状类似于投篮或掷铅球时球在空中所经过的路线，只是开口向上。这样的曲线叫做 抛物线。

二次函数 $y = x^2$ 的图象叫做 抛物线 $y = x^2$ ：

① 抛物线 $y = x^2$ 的开口方向 向上，它是 轴对称 图形，对称轴是 y轴 ($x = 0$)。

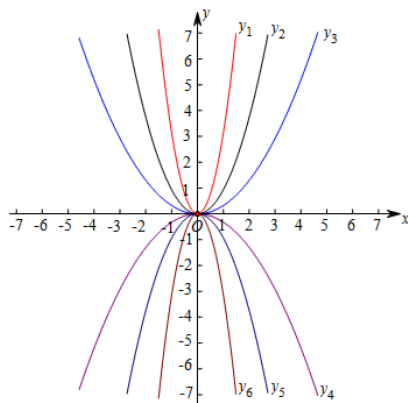
② 在对称轴左侧， y 随 x 的增大而 减小；在对称轴右侧， y 随 x 的增大而 增大。

③ 抛物线与它的对称轴的交点叫做抛物线的 顶点。抛物线 $y = x^2$ 的顶点是 (0, 0)。除顶点外，抛物线上所有点都在顶点的 上方（上方\下方），这个顶点是抛物线的最 低（高\低）点。

实际上，二次函数的图象都是抛物线，它们的开口或者向上或者向下，一般地，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象叫做抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 。此外，每条抛物线都有顶点、对称轴。顶点是抛物线的最低点或者最高点。

1. 二次函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图象和性质

观察下列函数 $y_1 = 3x^2$ ， $y_2 = x^2$ ， $y_3 = \frac{1}{3}x^2$ ， $y_4 = -\frac{1}{3}x^2$ ， $y_5 = -x^2$ ， $y_6 = -3x^2$ 的图象，并回答二次函数 $y = ax^2$ 的性质：

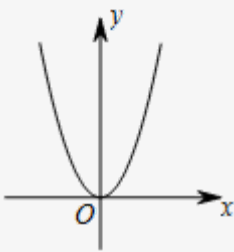
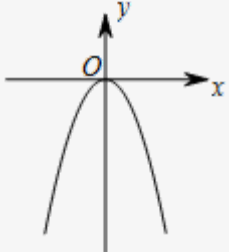


二次函数 $y = ax^2$ 的性质

二次项系数 a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
图象		
开口方向	向上	向下
对称轴	y 轴 ($x = 0$)	y 轴 ($x = 0$)
顶点	原点(0, 0)	原点(0, 0)
最高点和最低点	有最低点(0, 0)	有最高点(0, 0)
函数最值	有最小值 0	有最大值 0
图象特征	在对称轴左侧, 抛物线从左到右下 在对称轴右侧, 抛物线从左到右上	在对称轴左侧, 抛物线从左到右上 在对称轴右侧, 抛物线从左到右下
函数变化规律	当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增	当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减
$ a $ 决定开口大小	$ a $ 越大, 开口越小; $ a $ 越小, 开口越大. 在对称轴右侧, 沿着逆时针方向, a 的值逐渐增大.	

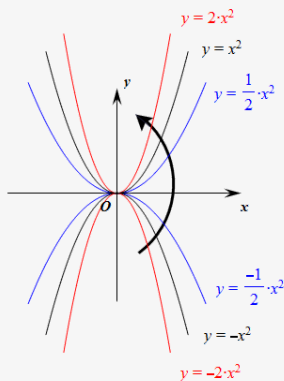
【备注】 1、 a 影响二次函数的开口方向与开口大小：

① 开口方向

二次项系数 a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
图象		

a 的正负决定二次函数的开口方向： $a > 0$ ，开口向上； $a < 0$ ，开口向下

② 开口大小

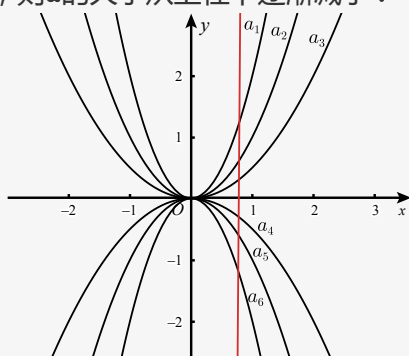


$|a|$ 决定开口大小： $|a|$ 越大，开口越小； $|a|$ 越小，开口越大。

在对称轴右侧，沿着逆时针方向， a 的值逐渐增大。

！注意：

在多个二次函数图象中比较 a 的大小时，还可以在 x 的正半轴，任作一条 $x = m$ 的直线，该直线会与每个二次函数相交，则 a 的大小从上往下逐渐减小。



例如上图，作出直线后可直接得： $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$ 。

若两个二次函数的开口大小相同，则它们 $|a|$ 的绝对值相同；若两个二次函数开口方向与开口大小都相同，则 a 的值相同。

2、利用二次函数的增减性可以比较函数值的大小：

当 $a > 0$ 时，离对称轴越远，函数值越大；当 $a < 0$ 时，离对称轴越远，函数值越小；因此比较函数值的大小可以直接利用点到对称轴的距离判断，但是一定要注意好开口方向。

🍌 举个“栗”子

栗子4

5. 若 $y = (2 - m)x^{m^2-3}$ 是关于 x 的二次函数，且图象开口向上，则 m 的值为 ()。

A. $\pm\sqrt{5}$

B. $\sqrt{5}$

C. $-\sqrt{5}$

D. 0

【备注】 二次函数开口向上，则 $a > 0$ ，此题中 $a = 2 - m > 0$ ，即 $m < 2$

【答案】 C

【解析】 由题知：
$$\begin{cases} 2 - m > 0 \text{ ①} \\ m^2 - 3 = 2 \text{ ②} \end{cases}$$

由②得 $m^2 = 5$,

$\therefore m = \pm\sqrt{5}$,

又由①得: $m < 2$,

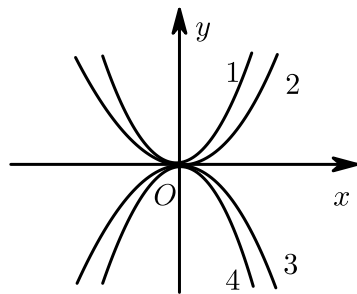
$\therefore m = -\sqrt{5}$.

故选C.

【标注】【知识点】二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

栗子5

6. 如图所示, 四个二次函数的图象分别对应的是① $y = ax^2$. ② $y = bx^2$. ③ $y = cx^2$. ④ $y = dx^2$. 则 a, b, c, d 的大小关系是().



- A. $a > b > c > d$ B. $a > b > d > c$ C. $b > a > c > d$ D. $b > a > d > c$

【备注】比较二次项系数的大小可以通过逆时针越来越大判断, 也可以通过在 x 轴正半轴作垂线判断

【答案】A

【解析】本题考查了函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 中 a 的性质, $|a|$ 越大, 开口越小.

当 $a > 0$ 开口向上, 当 $a < 0$, 开口向下.

【标注】【知识点】二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

栗子6

7. 已知 $a < -1$, 点 $(a-1, y_1)$, (a, y_2) , $(a+1, y_3)$ 都在函数 $y = -x^2$ 的图象上, 则().

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_1 < y_3 < y_2$ C. $y_3 < y_2 < y_1$ D. $y_2 < y_1 < y_3$

【备注】先判断三个点横坐标的大小关系, 可得到都是 < 0 , 又因为该二次函数 $a = -1 < 0$, 利用在 y 轴左侧, 随着 x 的增大 y 逐渐增大来比较函数值的大小

【答案】A

【解析】函数 $y = -x^2$ 图象开口向下，对称轴为 $x = 0$ ，

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时， y 随 x 增大而增大，

当 $x \geq 0$ 时， y 随 x 增大而减小，

$\therefore a < -1$ ，

$\therefore a - 1 < -2$ ， $a + 1 < 0$ ，且 $a - 1 < a < a + 1 < 0$ ，

又点 $(a - 1, y_1)$ ， (a, y_2) ， $(a + 1, y_3)$ 都在抛物线 $y = -x^2$ 上，

$\therefore y_1 < y_2 < y_3$ ，

故选A.

【标注】【知识点】二次函数 $y = ax^2$ 的图象和性质

栗子7

8. 已知抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 过 $A(-2, y_1)$ 、 $B(1, y_2)$ 两点，则下列关系式一定正确的是() .

A. $y_1 > 0 > y_2$

B. $y_2 > 0 > y_1$

C. $y_1 > y_2 > 0$

D. $y_2 > y_1 > 0$

【备注】分析题干可发现， A 、 B 两点位于对称轴的左右两侧，没办法直接通过函数的增减性进行比较，因此需要我们判断 A 、 B 两点离对称轴的距离及开口方向判断：

点 A 离对称轴2个单位长度，点 B 离对称轴1个单位长度，该二次函数开口向上，离对称轴越远函数值越大，可得 $y_1 > y_2$.

【答案】C

【解析】解： $\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = ax^2 (a > 0)$ ，

$\therefore A(-2, y_1)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(2, y_1)$.

又： $a > 0$ ， $0 < 1 < 2$ ，

$\therefore 0 < y_2 < y_1$.

故选：C .

【标注】【知识点】二次函数 $y = ax^2$ 的图象和性质

独步天下

9. 已知二次函数 $y = x^2$ ，当 $a \leq x \leq b$ 时， $m \leq y \leq n$ ，则下列说法正确的是() .

A. 当 $n - m = 1$ 时， $b - a$ 有最小值

B. 当 $n - m = 1$ 时， $b - a$ 有最大值

C. 当 $b - a = 1$ 时， $n - m$ 无最小值

D. 当 $b - a = 1$ 时， $n - m$ 有最大值

【备注】该题难度较大，综合性较强，可根据学生的程度选讲；此题涉及到了分类讨论的思想，需

要根据每个选项，先分析好当自变量为何值时，函数取得最值，然后再利用平方差公式以及 a 、 b 、 m 、 n 的范围分析代数式的最值

【答案】 B

【解析】 二次函数 $y = x^2$ 的对称轴为 $x = 0$ ，当 $x \leq 0$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x \geq 0$ 时， y 随 x 的增大而增大。

①A选项：当 $a \leq x \leq b \leq 0$ 时， $m \leq y \leq n$ ，

$$\therefore m = b^2, n = a^2, a + b \neq 0,$$

若 $n - m = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 1$ 时，

$$b - a = -\frac{1}{a + b},$$

$\therefore a$ 、 b 均为负数或 a 为负数， $b = 0$ ，

$\therefore a + b$ 取不到最小值，即 $-\frac{1}{a + b}$ 取不到最小值，

$a + b$ 可以取最大值为 -1 （ $a = -1$ ， $b = 0$ 时），

即 $b - a = -\frac{1}{a + b}$ 有最大值为 1 ，故A错误；

D选项：若 $b - a = 1$ 时，

$$\therefore n - m = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = -(a + b),$$

又 $a < 0$ ， $b \leq 0$ ，

$\therefore a + b$ 无最小值，即 $-(a + b) = n - m$ 无最大值，

$a + b$ 有最大值为 -1 （ $a = -1$ ， $b = 0$ 时），

即 $-(a + b) = n - m$ 有最小值为 1 ，故D错误；

②B选项、C选项：当 $0 \leq a \leq x \leq b$ 时， $m \leq y \leq n$ ，

$$\therefore m = a^2, n = b^2, a + b \neq 0, a \geq 0, b \geq 0,$$

若 $n - m = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 1$ 时，

$$b - a = \frac{1}{a + b},$$

$\therefore a + b$ 无最大值，

$\therefore b - a = \frac{1}{a + b}$ 没有最小值，

$\therefore a + b$ 可取最小值为 1 （ $a = 0$ ， $b = 1$ 时），

$\therefore b - a = \frac{1}{a + b}$ 有最大值为 1 ，

若 $b - a = 1$ 时， $n - m = a + b$ ，

$\therefore a + b$ 无最大值，

$\therefore n - m = a + b$ 没有最大值，

$\therefore a + b$ 可取最小值为 1 （ $a = 0$ ， $b = 1$ 时），

$\therefore n - m = a + b$ 有最小值为 1 。

③ $a < 0 < b$ 时, $m \leq y \leq n$,

$y = x^2$ 取最小值为 0, 即 $m = 0$,

若 $n - m = 1$ 时, 即 $m = 0, n = 1$,

$\therefore -1 \leq a < 0, 0 < b \leq 1$,

$\therefore b - a$ 有最大值为 2 ($b = 1, a = -1$ 时),

若 $b - a = 1$ 时, $n - m = n$,

又 $-1 \leq a < 0, 0 < b \leq 1$,

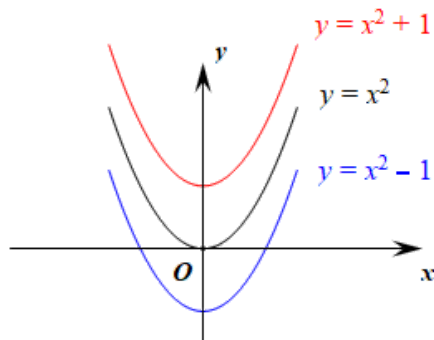
$\therefore n = a^2$ 或 b^2 , 即 n 取不到最小值, 故 C 错误, 故 B 正确.

故选 B.

【标注】【知识点】定轴动区间函数的最值问题

2. 二次函数 $y = ax^2 + k (a \neq 0)$ 的图象和性质

观察比较 $y = x^2$ 、 $y = x^2 + 1$ 与 $y = x^2 - 1$ 的图象, 并回答:



三条抛物线的形状_____, 位置不同; 对称轴都是_____.

抛物线 $y = x^2 + 1$ 顶点为 _____; 抛物线 $y = x^2 - 1$ 顶点为 _____.

从图形运动的角度:

图形上的每一点都进行同一个平移, 就是这个图形的一个平移; 反过来, 图形的一个平移就是图形上的每一点都进行这个平移, 所以由抛物线顶点所作的平移可知这条抛物线所作的平移:

抛物线 $y = x^2 + 1$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 向 _____ 平移 _____ 个单位得到;

抛物线 $y = x^2 - 1$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 向 _____ 平移 _____ 个单位得到.

【备注】三条抛物线的形状相同, 位置不同; 对称轴都是 y 轴.

抛物线 $y = x^2 + 1$ 顶点为 $(0, 1)$; 抛物线 $y = x^2 - 1$ 顶点为 $(0, -1)$.

抛物线 $y = x^2 + 1$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 向上平移 1 个单位得到;

抛物线 $y = x^2 - 1$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 向下平移 1 个单位得到.

即上下平移满足“上加下减”, 与一次函数平移口诀相同; 抛物线的上下平移不会改变形状及对称轴.

! 总结：

抛物线 $y = ax^2 + k$ ($a \neq 0$)的对称轴为_____, 顶点为_____. 它可以通过抛物线 $y = ax^2$ 向_____ ($k > 0$ 时)或向_____ ($k < 0$ 时)平移_____个单位得到.

【备注】抛物线 $y = ax^2 + k$ ($a \neq 0$)的对称轴为 y 轴, 顶点为(0, k). 它可以通过抛物线 $y = ax^2$ 向上 ($k > 0$ 时)或向下 ($k < 0$ 时)平移 $|k|$ 个单位得到. (即"上加下减, 上下平移在末梢").

函数 $y = ax^2 + k$ ($a \neq 0$)的增减性与 $y = ax^2$ 相同:

① $a > 0$, 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; 函数有最小值 k

② $a < 0$, 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 函数有最大值 k

🍌 举个“栗”子

栗子8

10. 抛物线 $y = 2x^2 - 3$ 的顶点在().

A. 第一象限

B. 第二象限

C. x 轴上

D. y 轴上

【备注】直接利用 $y = ax^2 + k$ ($a \neq 0$)的顶点坐标为(0, k)求解即可

【答案】D

【解析】 $a = 2, b = 0, c = 3$,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为(0, -3).

故选D.

【标注】【题型】图象与系数的关系

11. 与抛物线 $y = -x^2 + 1$ 的顶点相同、形状相同且开口方向相反的抛物线所对应的函数表达式为().

A. $y = -x^2$

B. $y = x^2 - 1$

C. $y = -x^2 - 1$

D. $y = x^2 + 1$

【备注】形状相同、开口相反意味着 a 的正负不同, 所以要寻找 $a = 1$, 顶点坐标为(0, 1)

【答案】D

【解析】

与抛物线 $y = -x^2 + 1$ 顶点相同，形状也相同，而开口方向相反的抛物线，即与抛物线 $y = -x^2 + 1$ 只有二次项系数不同。

即 $y = x^2 + 1$ 。

故选D。

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

12. 抛物线 $y = -2x^2 + 4$ 的最大值是 _____。

【备注】 $a = -2 < 0$ 开口向下，函数有最大值为4

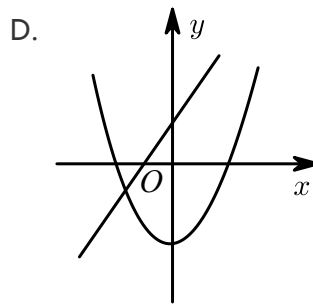
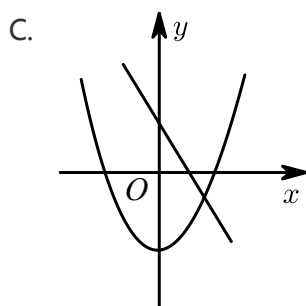
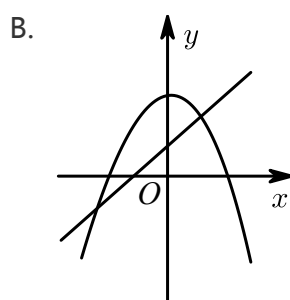
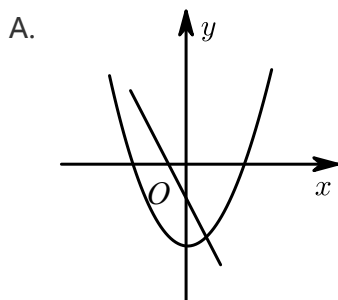
【答案】 4

【解析】由顶点式可知顶点坐标为 $(0, 4)$ ，且 $a = -2 < 0$ 开口向下，所以抛物线 y 的最大值为4。

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

栗子9

13. 同一坐标系中，一次函数 $y = -mx + n^2$ 与二次函数 $y = x^2 + m$ 的图象可能是（ ）。



【备注】由一次函数解析式可得应与 y 轴交于原点或正半轴，因此排除A选项；其次根据二次函数解析式 $a = 1$ 可得开口应向上，因此排除B选项；C、D选项可以用假设法进行分析，即假设某个函数图象正确去分析另外一个是否正确；对于C选项，通过一次函数图象可得 $m > 0$ ，因此二次函数的顶点应该在 y 轴正半轴，排除C选项；D选项，通过一次函数图象可得 $m < 0$ ，因此二次函数的顶点应该在 y 轴负半轴，所以选D

【答案】D

【解析】A选项：由直线与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上可知， $n^2 < 0$ ，错误；

B选项：由抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴上可知， $m > 0$ ，由直线可知， $-m > 0$ ，错误；

C选项：由抛物线 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上可知， $m < 0$ ，由直线可知， $-m < 0$ ，错误；

D选项：由抛物线 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上可知， $m < 0$ ，由直线可知， $-m > 0$ ，正确。

故选D。

【标注】【知识点】一次函数与二次函数图象的综合判断

栗子10

14. 将抛物线 $y = x^2$ 向下平移2个单位长度，平移后抛物线的解析式为_____。

【备注】上加下减，上下平移在末梢

【答案】 $y = x^2 - 2$

【解析】将抛物线 $y = x^2$ 向下平移2个单位长度，平移后的解析式为 $y = x^2 - 2$ 。

【标注】【知识点】二次函数平移变换

【能力】运算能力

栗子11

15. 若有二次函数 $y = ax^2 + c$ ，当 x 取 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) 时，函数值相等，则当 $x = x_1 + x_2$ 时，函数值为()。

A. $a + c$

B. $a - c$

C. $-c$

D. c

【备注】当二次函数上两个点的函数值相等，则这两个点关于对称轴对称；而 $y = ax^2 + k$ 形式的二次函数的对称轴为 y 轴，因此本题的 $x_1 + x_2 = 0$ ，当 $x = 0$ 时，函数值为0

【答案】D

【解析】二次函数 $y = ax^2 + c$ 的对称轴是 y 轴，当 x 取 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) 时，函数值相等，即以 x_1, x_2 为横坐标的点关于 y 轴对称，则 $x_1 + x_2 = 0$ ，此时函数值为

$$y = ax^2 + c = 0 + c = c.$$

故选D.

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

16. 已知点 $A(-2, y_1)$, $B(1, y_2)$, $C(5, y_3)$ 在二次函数 $y = -3x^2 + k$ 的图象上, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是().

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_3 < y_2 < y_1$ C. $y_3 < y_1 < y_2$ D. $y_1 < y_3 < y_2$

【备注】二次函数增减性问题, 开口向下, 离对称轴越远函数值越小; 判断离对称轴的远近即可

【答案】C

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = -3x^2 + k$ 图象的对称轴为 $x = 0$ 即 y 轴,

点 $A(-2, y_1)$, $B(1, y_2)$, $C(5, y_3)$,

到 y 轴的距离为 $|-2 - 0| = 2$, $1 - 0 = 1$, $5 - 0 = 5$, $5 > 2 > 1$,

且 $y = -3x^2 + k$ 有最大值,

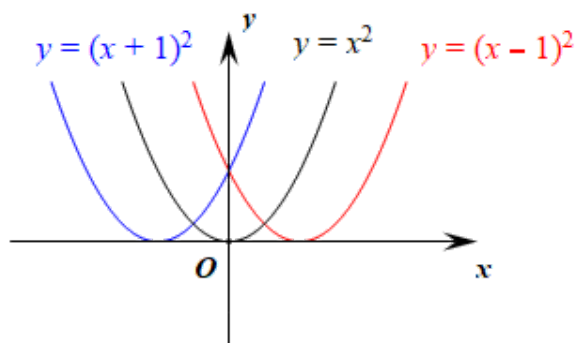
故 $y_2 > y_1 > y_3$ 即 $y_3 < y_1 < y_2$.

故选C.

【标注】【知识点】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的增减性

3. 二次函数 $y = a(x - h)^2 (a \neq 0)$ 的图象和性质

观察比较 $y = (x + 1)^2$ 、 $y = x^2$ 、 $y = (x - 1)^2$ 的图象, 并回答:



三条抛物线的形状 相同, 位置不同.

抛物线 $y = (x + 1)^2$ 的对称轴为 $x = -1$, 顶点为 $(-1, 0)$;

抛物线 $y = (x - 1)^2$ 的对称轴为 $x = 1$, 顶点为 $(1, 0)$;

从图形运动的角度:

抛物线 $y = (x + 1)^2$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 向 左 平移 1 个单位得到;

抛物线 $y = (x - 1)^2$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 向 右 平移 11 个单位得到。

！总结：抛物线 $y = a(x - h)^2 (a \neq 0)$ 的对称轴为 $x = h$ ，顶点为 $(h, 0)$ 。它可以通过抛物线 $y = ax^2$ 向 左 ($h > 0$ 时) 或向 右 ($h < 0$ 时) 平移 $|\leftarrow| \rightarrow|$ 个单位得到。

【备注】 抛物线 $y = a(x - h)^2 (a \neq 0)$ 可看作由 $y = ax^2$ 左右平移得到，即 **“左加右减，左右平移在括”**；此时要注意进行加减是指 x 发生变化，别忘记整体平方。二次函数的左右平移会使对称轴发生变化，同时函数的增减性也不能从 0 处进行区分了：

① $a > 0$ ，当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x = h$ 时，函数有最小值 0

② $a < 0$ ，当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x = h$ 时，函数有最大值 0

举个“栗子”

栗子12

17. 顶点为 $(-5, 0)$ ，且开口方向、形状与函数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 的图象相同的抛物线是 ()。

- A. $y = \frac{1}{3}(x - 5)^2$ B. $y = -\frac{1}{3}x^2 - 5$ C. $y = -\frac{1}{3}(x + 5)^2$ D. $y = \frac{1}{3}(x + 5)^2$

【备注】 寻找 $a = -\frac{1}{3}$ ，顶点坐标为 $(-5, 0)$ 的函数解析式

【答案】 C

【解析】 与 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 的图象开口方向、形状相同且顶点为 $(-5, 0)$ 的抛物线是 $y = -\frac{1}{3}(x + 5)^2$

【标注】 【知识点】二次函数 $y = a(x - h)^2$ 的图象和性质

18. 抛物线 $y = -3(x + 1)^2$ 不经过的象限是 ()。

- A. 第一、二象限 B. 第二、四象限 C. 第三、四象限 D. 第二、三象限

【备注】 由 $y = -3x^2$ 向右平移一个单位得到，因此函数图象经过三、四象限，顶点在 x 轴正半轴

【答案】 A

【解析】 $\therefore y = -3(x + 1)^2$ ，

$\therefore$ 抛物线开口向下，对称轴为 $x = -1$ ，顶点坐标为 $(-1, 0)$ ，

$\therefore$ 抛物线经过第三、四象限，

$\therefore$ 不经过第一、二象限。

故选：A .

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质

栗子13

19. 抛物线 $y = -2x^2$ 向左平移3个单位长度所得图象的解析式是 _____ .

【备注】左加右减，左右平移在末梢

【答案】 $y = -2(x+3)^2$

【解析】由题意可知抛物线 $y = -2x^2$ 向左平移3个单位长度所得图象的解析式为：

$$y = -2(x+3)^2 .$$

故答案为： $y = -2(x+3)^2$.

【标注】【知识点】二次函数平移变换

栗子14

20. 已知 $A\left(-\frac{1}{2}, y_1\right)$, $B(1, y_2)$, $C(4, y_3)$ 三点都在二次函数 $y = -(x-2)^2$ 的图象上，则 y_1 , y_2 , y_3 的大小关系为 () .

A. $y_1 < y_2 < y_3$

B. $y_1 < y_3 < y_2$

C. $y_3 < y_1 < y_2$

D. $y_3 < y_2 < y_1$

【备注】开口向下，离对称轴越远函数值越小，此题要注意对称轴为 $x = 2$

【答案】B

【解析】 $y = -(x-2)^2$ ，开口向下，离对称轴越远，函数值越小，

$$\because \left| -\frac{1}{2} - 2 \right| = \frac{5}{2} ,$$

$$|1 - 2| = 1 ,$$

$$|4 - 2| = 2 ,$$

$$\therefore \left| -\frac{1}{2} - 2 \right| > |4 - 2| > |1 - 2| ,$$

$$\therefore y_1 < y_3 < y_2 .$$

故选B .

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质

21. 已知在二次函数 $y = 2(x - h)^2$ 的图象上, 当 $x > 3$ 时, y 随 x 的增大而增大, 则 h 的取值范围是 ____ .

【备注】抛物线开口向上, 在对称轴右侧 y 随 x 的增大而增大, 因此 $h \leq 3$

【答案】 $h \leq 3$

【解析】解: 二次函数 $y = 2(x - h)^2$ 的图象的对称轴为直线 $x = h$,

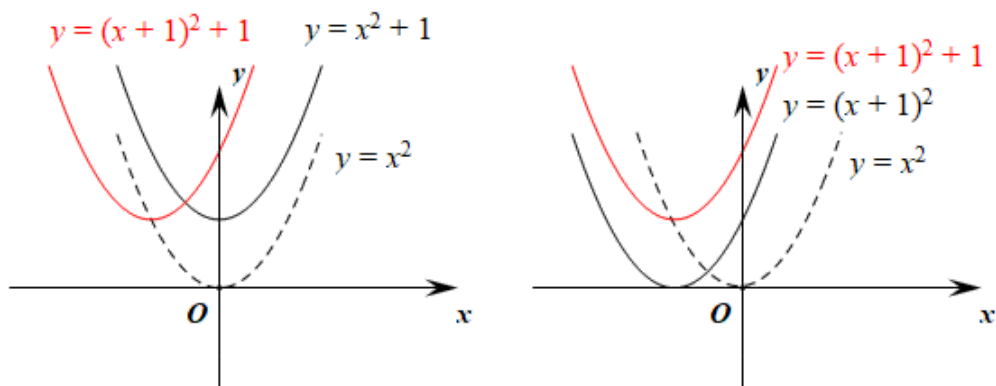
$\because x > 3$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore h \leq 3$.

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x - h)^2 + k$ 的图象和性质

4. 二次函数 $y = a(x - h)^2 + k (a \neq 0)$ 的图象和性质

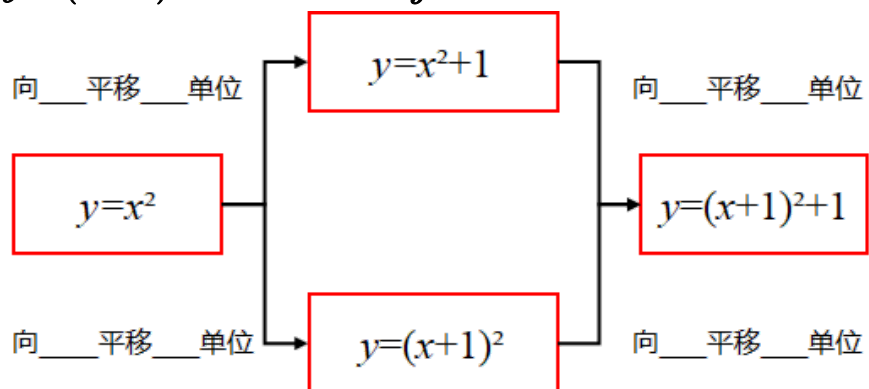
观察比较 $y = (x + 1)^2 + 1$ 、 $y = x^2$ 、 $y = (x + 1)^2$ 、 $y = x^2 + 1$ 的图象, 并回答:



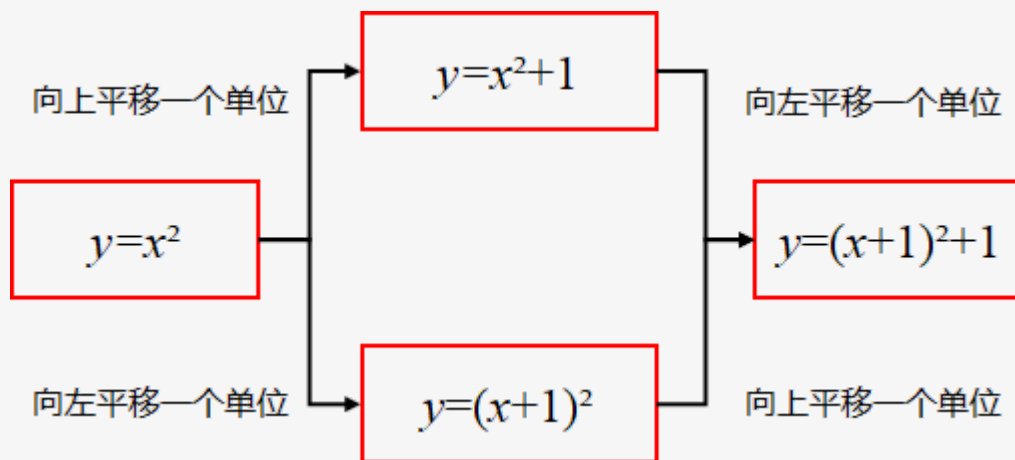
抛物线 $y = (x + 1)^2 + 1$ 的对称轴是 $x = -1$, 顶点是 $(-1, 1)$.

抛物线 $y = (x + 1)^2 + 1$ 可以由抛物线 $y = x^2 + 1$ 向 左 平移 1 个单位得到; 或者由抛物线 $y = (x + 1)^2$ 向 上 平移 1 个单位得到.

于是抛物线 $y = (x + 1)^2 + 1$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 进行两次平移得到:



【备注】



! 总结：

抛物线 $y = a(x - h)^2 + k$ ($a \neq 0$) 的对称轴为 $x = h$ ，顶点是 (h, k) 。它可以由抛物线 $y = ax^2$ 进行两次平移得到：可以先向 左 ($h > 0$ 时) 或向 右 ($h < 0$ 时) 平移 $|h|$ 个单位，再向 上 ($k > 0$ 时) 或向 下 ($k < 0$ 时) 平移 $|k|$ 个单位；也可以先上下平移再左右平移，所得结果一样。

抛物线 $y = a(x - h)^2 + k$ 叫做二次函数的 顶点式。

【备注】抛物线 $y = a(x - h)^2 + k$ ($a \neq 0$) 由 $y = ax^2$ 依据 “**左加右减，上加下减，左右平移在括号，上下平移在末梢**” 平移得到，叫做二次函数的顶点式，顶点坐标为 (h, k) ，对称轴为 $x = h$ 。函数的增减性会在 $x = h$ 的左右两侧发生变化：

① $a > 0$ ，当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x = h$ 时，函数有最小值 k

② $a < 0$ ，当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x = h$ 时，函数有最大值 k

💡 举个“栗”子

|| 栗子16

22. 由二次函数 $y = 2(x - 3)^2 + 1$ ，可知 ()。

A. 其图象的开口向下

B. 其图象的对称轴为直线 $x = -3$

C. 其最小值为1

D. 当 $x < 3$ 时， y 随 x 的增大而增大

【备注】该二次函数开口向上，对称轴为 $x = 3$ ，顶点坐标 $(3, 1)$ ，最小值为1，当 $x < 3$ 时， y 随 x 的增大而减小，当 $x > 3$ 时， y 随 x 的增大而增大

【答案】C

【解析】 A. 二次函数的二次项系数 $2 > 0$ ，开口向上，错误，
 B. 图象的对称轴为直线 $x = 3$ ，错误，
 C. 函数顶点坐标为 $(3, 1)$ 最小值为1，正确，
 D. 由于二次函数对称轴为直线 $x = 3$ 且开口向上，当 $x < 3$ 时， y 随 x 的增大而减小，错误。

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

23. 如果抛物线 $y = (x - m)^2 + m + 1$ 的对称轴是直线 $x = 1$ ，那么它的顶点坐标为 _____。

【备注】由解析式可得对称轴为 $x = m$ ，顶点坐标为 $(m, m + 1)$ ，因此 $m = 1$

【答案】 $(1, 2)$

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = (x - m)^2 + m + 1$ 的对称轴是直线 $x = 1$ ，
 $\therefore m = 1$ ，
 $\therefore$ 解析式 $y = (x - 1)^2 + 2$ ，
 $\therefore$ 顶点坐标为： $(1, 2)$ ，
 故答案为： $(1, 2)$ 。

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

栗子17

24. 已知点 $A(4, y_1)$ ， $B(\sqrt{2}, y_2)$ ， $C(-2, y_3)$ 都在二次函数 $y = (x - 2)^2 - 1$ 的图象上，则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是（ ）。

A. $y_1 > y_3 > y_2$ B. $y_1 > y_2 > y_3$ C. $y_3 > y_2 > y_1$ D. $y_3 > y_1 > y_2$

【备注】开口向上，离对称轴越远函数值越大，此题要注意对称轴为 $x = 2$

【答案】 D

【解析】 方法一： $x = 4$ 时， $y_1 = 3$ 。
 $x = \sqrt{2}$ 时， $y_2 = 5 - 4\sqrt{2}$ 。
 $x = -2$ 时， $y_3 = 15$ 。
 $\therefore y_3 > y_1 > y_2$ 。
 方法二： $\because y = (x - 2)^2 - 1$ ，
 $\therefore$ 图象的开口向上，对称轴是直线 $x = 2$ ，

$A(4, y_1)$ 关于直线 $x = 2$ 的对称点是 $(0, y_1)$,

$\therefore -2 < 0 < \sqrt{2}$,

$\therefore y_3 > y_1 > y_2$,

故选D .

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

栗子18

25. 若二次函数 $y = -2(x - m)^2 - 1$, 当 $x \geq 2$ 时 , y 随 x 增大而减小 , 则 m 的取值范围是 _____ .

【备注】抛物线开口向下 , 在对称轴右侧满足 y 随 x 的增大而减小 , 因此 $m \leq 2$

【答案】 $m \leq 2$

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = -2(x - m)^2 - 1$, 对称轴为直线 $x = m$, 当 $x \geq 2$ 时 , y 随 x 增大而减小 ,

$\therefore m \leq 2$.

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质